

T.D. MÉCANIQUE QUANTIQUE
* Série 2 *

I. Paquet d'ondes et Inégalités spectrales

On considère une particule libre de masse m que l'on décrit par un paquet d'ondes (à une dimension) défini par :

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x) e^{i[k_x \cdot x - \omega(k_x) \cdot t]} dk_x$$

On considère l'instant $t=0$ et on suppose que $g(k_x)$ a une forme rectangulaire :

$g(k_x) = 1$ pour $k_1 < k_x < k_2$ et $g(k_x) = 0$ ailleurs

1) a) Déterminer $\Psi(x, 0)$; on posera : $k_0 = (k_2 + k_1)/2$ et $\Delta k = k_2 - k_1$

b) En déduire la densité de probabilité et tracer sa variation.

c) Justifier que l'onde $\Psi(x, 0)$ peut être associée à la particule.

2) Quel est le produit $\Delta x \cdot \Delta k_x$ des extensions des fonctions. Réécrire ce produit en utilisant la relation de L. De Broglie. Commenter.

3) Donner la relation de dispersion $\omega(k_x)$. Comparer la vitesse de groupe v_g à la vitesse de phase v_ϕ et à la vitesse v de la particule. Conclure.

4) On plonge maintenant la particule dans un potentiel constant $U(x) = U_0$; montrer que l'expression générale $\Psi(x, t)$ du paquet d'ondes est solution de l'équation de Schrödinger.

II. Comportement d'un paquet d'ondes sur une marche de potentiel

Soit une particule de masse m se déplaçant le long de l'axe x soumise à un potentiel $U(x)$ indépendant du temps en forme de marche. Au point $x=0$, le potentiel est discontinu et on a $U(x) = 0$ pour x négatif et $U(x) = U_0 > 0$ pour x positif.

A/ On sait que dans un tel problème, l'équation de Schrödinger conduit (voir cours) :

– pour $x < 0$ à une solution, somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, soit :

$$\Psi_1(x, t) = [A(k) e^{ik \cdot x} + B(k) e^{-ik \cdot x}] e^{-i\omega(k) \cdot t}$$

avec $\hbar\omega(k) = \hbar^2 k^2 / 2m = E(k)$ où $E(k)$ est l'énergie de la particule.

– pour $x > 0$ à une fonction d'onde transmise dont la forme dépend de la différence entre k et K_0 où $K_0 = \sqrt{2mU_0} / \hbar$. On considérera uniquement le cas où $k < K_0$ et on a alors

$$\text{pour } x > 0 : \quad \Psi_2(x, t) = C(k) e^{-\rho(k) \cdot x} e^{-i\omega(k) \cdot t} \quad \text{avec } \rho^2(k) = K_0^2 - k^2$$

1) Montrer que les coefficients A , B , C sont liés par les relations :

$$\frac{B(k)}{A(k)} = \frac{k - i\rho(k)}{k + i\rho(k)} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{C(k)}{A(k)} = \frac{2k}{k + i\rho(k)} \quad (2)$$

2) Montrer que l'on peut réécrire :

$$(1) \text{ sous la forme : } \frac{B(k)}{A(k)} = e^{-2i\theta(k)} \quad \text{et} \quad (2) \text{ sous la forme : } \frac{C(k)}{A(k)} = \alpha(k) e^{-i\theta(k)}$$

Exprimer $\tan\theta(k)$ et $\alpha(k)$ en fonction de k et K_0 ; (à noter que $\alpha(k)$ est réel).

B/ On sait que les ondes planes ne constituent pas des solutions physiquement acceptables de l'équation de Schrödinger, on doit alors construire des paquets d'ondes.

On supposera que le paquet d'ondes incident s'écrit :

$$\Psi_i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i[k \cdot x - \omega(k) \cdot t]} dk \quad \text{où } g(k) \text{ est nulle pour tout } k \text{ supérieur à } K_0$$

1) Donner l'expression générale du paquet d'ondes réfléchi $\Psi_r(x,t)$ et celle du paquet d'ondes transmis $\Psi_{tr}(x,t)$, en utilisant les résultats de A/.

2) On suppose que $g(k)$ est une fonction réelle, centrée sur k_0 et ne prenant de valeurs appréciables que sur un intervalle Δk autour de k_0 . Dans ces conditions, on utilise la condition de phase stationnaire pour déterminer le centre du paquet.

a) Rappeler cette condition et déterminer la position, $x_i(t)$, du centre du paquet d'onde incident à l'instant t ? En déduire sa vitesse.

b) Montrer que la position, $x_r(t)$, du centre du paquet d'ondes réfléchi s'écrit :

$$x_r(t) = -\frac{\hbar k_0}{m}(t - \tau) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2m}{\hbar k_0} \frac{1}{\sqrt{k_0^2 - k_0^2}} \quad \text{à } k_0 \neq k_0$$

c) Interpréter les résultats précédents en discutant l'évolution temporelle du paquet d'ondes total. On rappelle que ces résultats n'ont de sens que pour $x < 0$. Quelle est la signification physique de τ ? Réexprimer τ en fonction de U_0 et $E(k_0) = E_0$.

d) On s'intéresse maintenant au paquet d'ondes transmis $\Psi_{tr}(x,t)$. Montrer que son module est maximal quand $t = \tau/2$.

$$\text{On donne: } [\text{Arctg } f(x)]' = \frac{[f(x)]'}{1 + [f(x)]^2}$$

3) Application numérique : Pour un électron, on suppose que $U_0 = 2E_0 = 4\text{eV}$. Calculer la vitesse du paquet d'ondes incident associé ainsi que t . ($\hbar \sim 10^{-34} \text{ J.s}$ et $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).

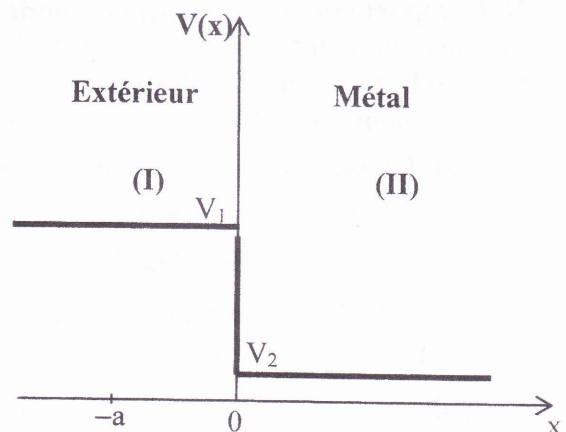
III. Marche de potentiel «inversée»

Soit un système de masse m et d'énergie E soumis au potentiel $V(x)$ tel que :

$$V(x) = V_1 \text{ pour } x < 0 \text{ et } V(x) = V_2 \text{ pour } x > 0$$

Un tel système pourrait par exemple représenter l'interaction d'un électron libre et la structure atomique d'un métal situé en $x > 0$.

Considérons que l'électron est libéré du métal et se déplace vers les x négatifs.



1) 1^{er} cas : $E > V_1 > V_2$

Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans chacune des régions (I) et (II).

a) Résoudre l'équation de Schrödinger et préciser la nature de chaque terme.

b) Ecrire les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée au point $x=0$.

c) Définir le coefficient de transmission T , c'est à dire la probabilité pour que l'électron quitte le métal. Expliciter T en fonction de k_1 et k_2 où k_1 et k_2 sont les vecteurs d'ondes (à définir). Même question pour R et vérifier que $T+R=1$.

d) Ecrire T en fonction de V_1 , V_2 et E et faire application numérique avec :

$E = 1\text{eV}$, $V_1 = 0\text{eV}$ et $V_2 = -10\text{eV}$. Commenter.

2) 2^{ème} cas : $V_2 < E < V_1$

a) Que devient la solution de l'équation de Schrödinger dans la zone (I) ? Interpréter ce résultat.

b) Donner une explication qualitative du phénomène qui aura lieu si on considère que la zone (I) présente une 2^{ème} discontinuité de potentiel (V_3) à $x = -a$ et que $V_2 < V_3 < E < V_1$ (barrière de potentiel).

TD 2: Mécanique Quantique

I - Paquet d'ondes et Inégalités spectrales:

On admet l'hypothèse de la dualité onde - Corpuscule de la matière, Ceci impose une ~~des~~ ^{la} description de la fonction d'onde, cette description tient compte d'une Variation Spatio-temporelle, mais pour que cette description ait un sens physique, la particule est plutôt représentée par un paquet d'onde.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\text{espace}} g(\vec{k}_r) e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega(\vec{k}_r)t)} d^3 \vec{k}_r$$

en 1D suivant Ox

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x) e^{i(k_x x - \omega(k_x)t)} \quad \text{Ecriture Mathé}$$

$\Psi(x, t) \cdot \Psi^*(x, t)$ = densité de probabilité de présence de la particule

1° a) Calculer $\Psi(x, 0)$ Sachant $g(k_x) \left\{ \begin{array}{l} = 1 \quad \text{si } k_1 < k_x < k_2 \\ = 0 \quad \text{si ailleurs} \end{array} \right.$

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} e^{ik_x x} dk_x = \frac{1}{ix\sqrt{2\pi}} \left[e^{ik_2 x} - e^{ik_1 x} \right] \quad (I)$$

$$k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \Delta k = k_2 - k_1$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1 + k_2 = 2k_0 \\ k_2 - k_1 = \Delta k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2} \\ k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2} \end{array}$$

On porte dans l'expression (I)

$$\Psi(x,0) = \frac{e^{ik_0 x}}{ix\sqrt{2\pi}} \left[e^{i\frac{\Delta k}{2}x} - e^{-i\frac{\Delta k}{2}x} \right]$$

$$= \frac{2e^{ik_0 x}}{x\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\frac{\Delta k}{2}x} - e^{-i\frac{\Delta k}{2}x}}{2i} \right]$$

$$\Psi(x,0) = \frac{2e^{ik_0 x}}{x\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)$$

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\frac{\Delta k}{2}x}{\frac{\Delta k}{2}x} \times \frac{\Delta k}{2} \times 2e^{ik_0 x}$$

$$\Psi(x,0) = A(x) e^{ik_0 x}$$

$$A(x) = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)}{\frac{\Delta k}{2}x}$$

Amplitude de l'onde

$e^{ik_0 x}$: partie oscillante de l'onde

b) Densité de Probabilité de l'onde

$$\rho(x) = \Psi(x,0) \Psi^*(x,0) = A^2(x) = \left(\frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)}{\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)^2}$$

on pose $X = \frac{\Delta k}{2}x$

$$\rho(x) = A^2(X) = \left(\frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{\sin^2 X}{X^2}$$

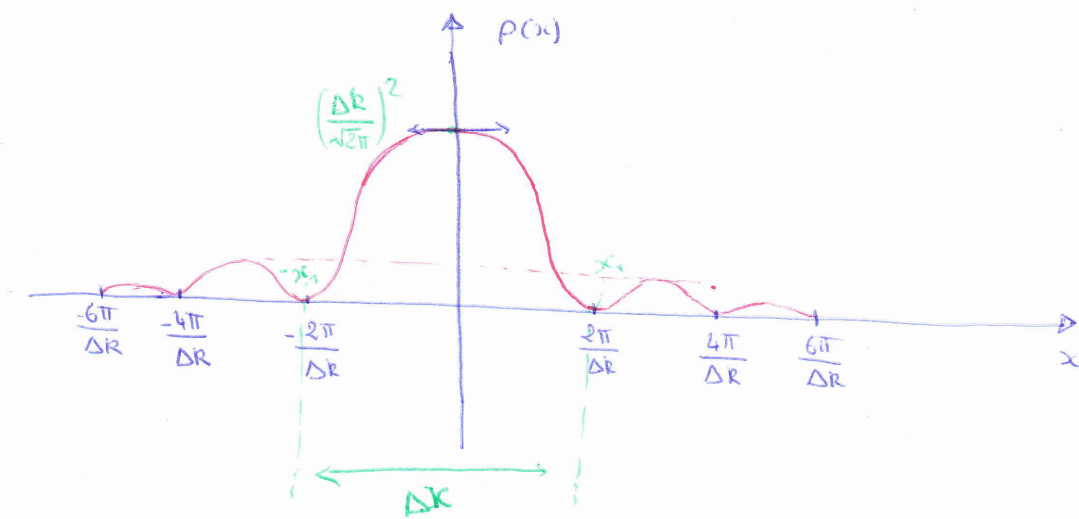
* lorsque $X \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), on $\lim_{X \rightarrow 0} \rho(x) = \left(\frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}}\right)^2$

* La fonction $\rho(X) = \rho(-X)$: fonction paire

$\Rightarrow$ Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

* $\rho(X) = 0$, $\sin(X) = 0$, $X = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$

$$x = \frac{2n\pi}{\Delta k}$$



c) Justifier que $\Psi(x,0)$ représente bien la particule.

- On peut montrer que $\int p(x) dx < \infty$ Converge

$$\int \Psi(x,0) \Psi^*(x,0) dx < \infty$$

ou

- En utilisant le tracé de $p(x)$, on constate que le maximum de $p(x)$ est bien limité dans une région de l'espace.

En fait quand $x \rightarrow 0$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) \Rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ La particule est située dans la région ou allant tout de $x=0$

$\Psi(x,0)$ a un étendu limité dans l'espace

$\Rightarrow$ elle pourra bien représenter la particule

2°/ Calcule $\Delta x \cdot \Delta k_x$

D'après le tracé, $\Delta x = (x_1 - (-x_0))$

$$\Delta x = \frac{2\pi}{\Delta R} - \left(-\frac{2\pi}{\Delta R}\right) = \frac{4\pi}{\Delta R}$$

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta k = 4\pi}$$

$\Delta R = \frac{4\pi}{\Delta x}$, cette relation montre que :

• Si Δx diminue $\Rightarrow \Delta R$ ↑
On mesure avec plus de précision $\Rightarrow$ On perd la précision ΔR

En Mécanique Quantique on ne peut pas avoir une précision simultanée de ~~Δx~~ sur Δx et sur ΔR . Toute précision sur la mesure de l'un des paramètres est accompagnée d'une perte de précision sur l'autre.
C'est le principe d'incertitude d'Heisenberg.

* $p = mv = \hbar k \quad \Delta p = m \Delta v$

$$\Rightarrow m \Delta v = \hbar \Delta k$$

$$\Rightarrow \Delta x \times \frac{m \Delta v}{\hbar} = 4\pi$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = 4\pi\hbar = 2h$$

En Mécanique Quantique, toute mesure précise sur la position ($\Delta x \downarrow$) $\Rightarrow$ une perte de précision sur la mesure de la quantité de mouvement (vitesse) et inversement.

3% La particule est libre : $V(x) = 0$

$$E = E_c + V(x) \Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$E = \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k_x) e^{i(k_x x - \omega t)} dk_x$$

le terme phase de l'onde est : $\varphi = kx - \omega(k)t$

* Par definition, V_g est telle que :

$$\frac{d\varphi}{dR} = 0 \Rightarrow x - \overset{V_g}{\frac{d\omega}{dR}} t = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_g = \frac{d\omega}{dR} = \frac{\hbar k}{m}}$$

* La vitesse de phase est telle que :

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(kx - \omega t)}{dt} = 0$$

$$k \underset{V_\varphi}{\frac{dx}{dt}} - \omega = 0$$

$$V_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{V_g}{2}$$

$$\boxed{V_\varphi = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{V_g}{2}}$$

* La vitesse de la particule

$$p = mv = \hbar k$$

L.B

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{\hbar k}{m} = V_g}$$

En montre que v particule s'identifie bien à la vitesse de groupe (vitesse du paquet d'onde)

$\Downarrow$

A une particule, on peut lui associer un paquet d'ondes.

4° Particule liée, $U(x) = U_0$

$$E = E_c + U(x) = \frac{p^2}{2m} + U_0$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x,t) + U_0 \Psi(x,t)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x,t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \right)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x,t)$$

$$U_0 \psi(x,t) = \cancel{U_0 \psi(x,t)} \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

d'où $\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x,t) + U_0 \psi(x,t) = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0 \right) \psi(x,t) \quad (I)$

$$i\hbar \frac{d\psi(x,t)}{dt} = i\hbar \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \right)$$

$$= +\hbar \omega \psi(x,t) = E \psi(x,t)$$

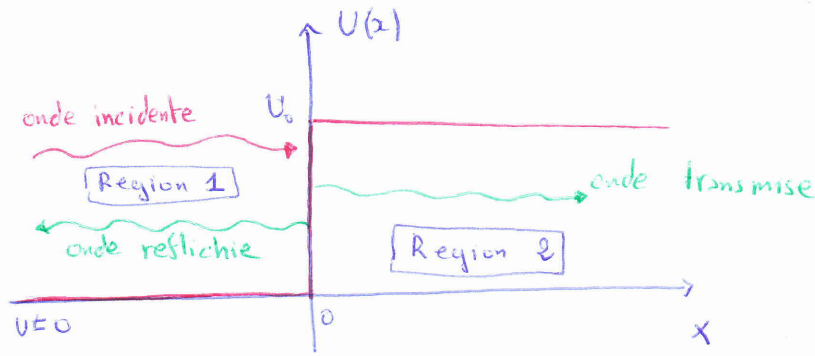
$$\text{or } E = E_c + U_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U_0 \right) \psi(x,t) \quad (II)$$

(I) = (II) $\Rightarrow$ L'équation de Schrödinger est vérifiée

II - Comportement d'un paquet d'ondes sur une marche de potentiel

A)



$$\underbrace{\Psi_1(x,t)}_{\text{Region 1}} = \underbrace{\left[A(k)e^{ikx} \right]}_{\substack{\text{onde incidente} \\ \Psi_i(x,t)}} + \underbrace{\left[B(k)e^{ikx} \right]}_{\substack{\text{onde réfléchie} \\ \Psi_r(x,t)}} e^{i\omega(k)t}$$

$$\underbrace{\Psi_2(x,t)}_{\text{Region 2}} = C(k)e^{-p(k)x} e^{-i\omega(k)t}$$

Avec: $E = \hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ——— Region 1

$$p^2 = k_0^2 - k^2 \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2}} \quad \text{——— Region 2}$$

1° On utilise la ~~cond~~ continuité des fonction d'ondes et de leur dérivées au point de discontinuité.

En $x=0$

$$A + B = C \quad (\Psi_1(0,t) = \Psi_2(0,t))$$

$$ik(A - B) = -pC \quad (\Psi_1'(0,t) = \Psi_2'(0,t))$$

$$2A = C \left(1 - \frac{p}{ik} \right)$$

$$2Aik = C(ik - p)$$

$$\boxed{\frac{C}{A} = \frac{2k}{k + ip}} \quad (I)$$

$$B = C - A = \left(\frac{2k}{R+ip} - 1 \right) A$$

$$\boxed{\frac{B}{A} = \frac{k-ip}{R+ip}} \quad (I)$$

20 Pour un nombre Complexe $z \in \mathbb{C}$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z^* = x - iy \\ |z|^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$z = |z| e^{i\theta} \\ z^* = |z| e^{-i\theta} \quad , \quad \theta \text{ Argument de } z$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{k^2 + p^2} e^{-i\theta}}{\sqrt{R^2 + p^2} e^{i\theta}} = e^{-2i\theta(k)}$$

$$\theta \text{ est tel que } \operatorname{tg}(\theta) = \frac{p}{k}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \sqrt{\frac{k_0^2 - k^2}{k^2}} = \sqrt{\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2k}{\sqrt{k^2 + p^2}} e^{i\theta} = \underbrace{\frac{2k}{\sqrt{k^2 + p^2}}}_{\alpha(k)} e^{i\theta}$$

$$\alpha(k) = \frac{2k}{\sqrt{k^2 + p^2}}$$

$$k^2 + p^2 = k_0^2 \Rightarrow \alpha(k) = \frac{2k}{k_0} \in \mathbb{R}$$

B)

1/ En se référant à la question 4° de l'exercice 1, le paquet d'onde "forme d'onde planes" est solution de l'équation de Schrodinger par ce qu'il est localisé dans une région de l'espace, pour cela la fonction d'onde incidente peut être donnée par :

$$\Psi_i(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} g(k) &= 0, & k > k_0 \\ g(k) &\neq 0 & k < k_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow E < U_0$ hypothèse de A/

L'onde plane incidente $\longrightarrow A(k) e^{i(kx - \omega t)}$

$$g(k) \longrightarrow A(k)$$

$$\begin{aligned} \Psi_r(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) e^{i(kx + \omega t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-2i\theta} e^{-i(kx + \omega t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-i(2\theta + kx + \omega t)} dk \end{aligned}$$

$$A(k) e^{-2i\theta} \longrightarrow g(k)$$

onde transmise

$$\Psi_{tr}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(k) e^{-p x} e^{-i \omega t} dk$$

$$\Psi_{tr}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{-p x} e^{-i \omega t} e^{-i \theta} A(k) dk$$

$$g(k) \longrightarrow \alpha(k) A(k) e^{-i \theta}$$

$$\Psi_{tr}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) A(k) e^{-p x} e^{-i(\omega t + \theta)} dk$$

29 a) Condition de stationnarité

Avec $\varphi_i(R) = kx - \omega(R)t$ et en utilisant les résultats de l'exercice 1

la condition est traduite par :

$$\frac{d\varphi_i}{dR} \Big|_{R=k_0} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Paquet d'onde centré} \\ \text{autour de } k_0 \end{array} \right)$$

$$\boxed{x_i - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t = 0}$$

Avec $E = \hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\Rightarrow \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$$

D'où $\boxed{x_i(t) = \frac{\hbar k_0}{m} t}$

$$V_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\hbar k_0}{m} = V_{\text{group}} = V_{\text{particule}}$$

b) Pour l'onde réfléchie, $\varphi_r = -\ell\theta - kx_r - \omega t$

Condition de stationnarité

$$\frac{d\varphi_r}{dR} \Big|_{R=k_0} = 0 \Rightarrow -\ell \frac{d\theta}{dk} \Big|_{k=k_0} - x_r - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t = 0$$

$$x_r = -\ell \frac{d\theta}{dk} \Big|_{k=k_0} - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t$$

$$\frac{d\theta}{dk} \Big|_{k=k_0} = ? \Rightarrow$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1}$$

$$d(\lg \theta) = d \left(\sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1} \right)$$

$$(1 + \lg^2 \theta) d\theta = \frac{-2k k_0^2}{2k^4} \times \frac{dk}{\sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1}}$$

$$\left(1 + \frac{k_0^2}{k^2} - 1\right) d\theta = \dots \frac{dk}{\sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1}}$$

$$d\theta = \frac{-dk}{k \sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1}}$$

$$\frac{d\theta}{dk} = \frac{-1}{\sqrt{k_0^2 - k^2}}$$

Ensuite:

$$x_r(t) = \frac{+2}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} - \frac{\hbar k_0}{m} t$$

$$= -\frac{\hbar k_0}{m} \left[t - \frac{2m}{\hbar k_0 \sqrt{k_0^2 - k^2}} \right]$$

$$k_0 \neq k$$

$$x_r(t) = -\frac{\hbar k_0}{m} (t - \tau)$$

Le calcul de $x_i(t)$ et de $x_r(t)$ respectivement de l'onde incidente et réfléchie n'a de sens que si $x_i(t) < 0$ et $x_r(t) < 0$ (car l'onde incidente et réfléchie se propage dans la région d'espace $x < 0$)

Pour $t < 0$

$$x_i = \frac{\hbar k_0}{m} t < 0$$

$x_r(t) > 0$ n'a pas de sens physique

Donc le paquet d'onde total

$\Psi_i(x, t) = \Psi_i(x, t) + \Psi_r(x, t)$ est réduit au paquet d'ondes incidentes

* Pour $0 \leq t \leq \tau$

$$x_i(t) > 0$$

$$x_r(t) > 0$$

le phénomène de réflexion n'a pas encore eu lieu. (ne s'est pas produit)

$\Rightarrow$ le phénomène de réflexion présente un retard de $(t = \tau)$ avant de se produire.

le concepte quantique montre un retard dans la production de la réflexion

Ce phénomène est instantané en concepte classique.

* Pour ~~$t < \tau$~~ $t = \tau$

Debut de la réflexion

* Pour $t > \tau$

$$\Rightarrow x_i(t) > 0$$

$$x_r(t) < 0$$

$\Rightarrow$ le paquet d'onde $\Psi_i(x,t)$ est réduit au paquet d'onde réfléchi.

d) On s'intéresse au paquet d'onde ~~réfléchies~~ transmises

$$\Psi_{tr}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \alpha(R) A(R) e^{-pR} e^{-i(\omega t + \theta)} dk$$

$$\text{avec } \varphi_{tr} = -\omega t - \theta$$

La Condition de ~~stationnement~~ stationnarité du paquet d'onde transmise est

$$\text{telle que : } \frac{d\varphi_{tr}}{dk} \Big|_{k=k_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega(k)}{dk} \Big|_{k=k_0} + \frac{d\theta(k)}{dk} \Big|_{k=k_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar k_0}{m} t - \frac{1}{\sqrt{K_0^2 - k_0^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{m}{\hbar k_0 \sqrt{K_0^2 - k_0^2}} = \frac{\tau}{2}}$$

Application Numerique

$$U = 2E_0 = 4\text{eV} \quad \hbar \approx 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$K_0^2 = \frac{2mU_0}{\hbar^2}$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \Rightarrow k_0^2 = \frac{2mE_0}{\hbar^2}$$

$$\tau = \frac{2m}{\hbar k_0^2 \left(\sqrt{\frac{K_0^2}{k_0^2} - 1} \right)}$$

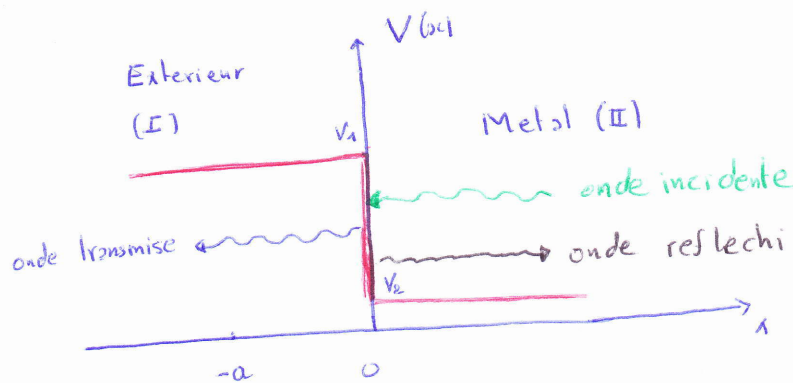
$$\frac{K_0^2}{k_0^2} - 1 = \frac{2mU_0 \hbar^2}{\hbar^2 2mE_0} - 1 = \frac{U_0}{E_0} - 1$$

$$\tau = \frac{2m}{\hbar \frac{2mE_0}{\hbar^2} \sqrt{\frac{U_0}{E_0} - 1}} = \frac{\hbar}{E_0 \sqrt{\frac{U_0}{E_0} - 1}}$$

$$\tau = \frac{10^{-34}}{2 \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$\boxed{\tau \approx 3.10^{-16} \text{ s}}$$

III . Marche de potentiel



Cas ou $E > V_1 > V_2$

a)

Equ. Schro :

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \varphi(x) = 0$$

Region II :

$$\varphi_{II}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2) \varphi_{II}(x) = 0$$

On pose : $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)$

$$\varphi_{II}(x) = \underbrace{A e^{-i k_2 x}}_{\text{incidente}} + \underbrace{B e^{i k_2 x}}_{\text{reflechie}}$$

Region I :

$$\varphi_I''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_1) \varphi_I(x) = 0$$

$$\varphi_I(x) = \underbrace{C e^{-i k_1 x}}_{\text{transmises}} + \underbrace{D e^{i k_1 x}}_{\text{retour}}$$

avec $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_1)$

Puisque'il n'y a pas d'onde reflechie lorsque $x \rightarrow -\infty$, $D = 0$

" Pas d'onde de retour "

$$\varphi_I(x) = C e^{-i k_1 x}$$

b)

$$\varphi_{II}(0) = \varphi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C$$

$$\varphi'_{II}(0) = \varphi'_{II}(0) \Rightarrow ik_2(B - A) = ik_1 C$$

$$\begin{cases} A + B = C \\ A - B = \frac{k_1}{k_2} C \end{cases}$$

$$2A = \left(\frac{k_2 + k_1}{k_2} \right) C \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}$$

$$B = C - A =$$

$$\frac{B}{A} = \frac{C}{A} - 1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} - 1 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}$$

c)

Coefficient de transmission :

$$T = \frac{|\phi_{tr}|^2}{|\phi_{incide}|^2} \times \frac{V_{g,tr}}{V_{g,ince}}$$

$$R = \frac{|\phi_r|^2}{|\phi_i|^2} \times \frac{V_{g,r}}{V_{g,i}}$$

$V_{g,tr}$: vitesse de groupe du paquet d'onde transmises.

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \times \frac{\hbar k_1 m}{\hbar k_2 m} = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \times \frac{k_1}{k_2}$$

$$T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 \times \frac{\hbar k_2 m}{m \times \hbar k_2} = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2$$

$$R + T = \frac{k_2^2 + k_1^2 - 2k_1 k_2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = 1$$

d)

A.N

$$k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_1)$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)$$

$$T = \frac{4 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_1) \times \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)}}{\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left[\sqrt{E - V_1} + \sqrt{E - V_2} \right]} \right)^2} = 4 \frac{\sqrt{(E - V_1)(E - V_2)}}{\left(\sqrt{E - V_1} + \sqrt{E - V_2} \right)^2}$$

$$= \frac{4 \sqrt{E^2 + V_1 V_2 - E(V_1 + V_2)}}{2E - V_1 - V_2 + 2\sqrt{(E - V_1)(E - V_2)}}$$

A.N

$$T = 71\%$$

Soit 100 particule incidents on a

71 particule transmise
et
29 particule reflechie.

2° Cas $V_2 < E < V_1$

Region II:

$$\varphi_2(x) = A e^{-i k_2 x} + B e^{i k_2 x}$$

avec $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)$

Region I

$$\varphi_1''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_1)}_{< 0} \varphi_1(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V_1 - E) \varphi_1(x) = 0$$

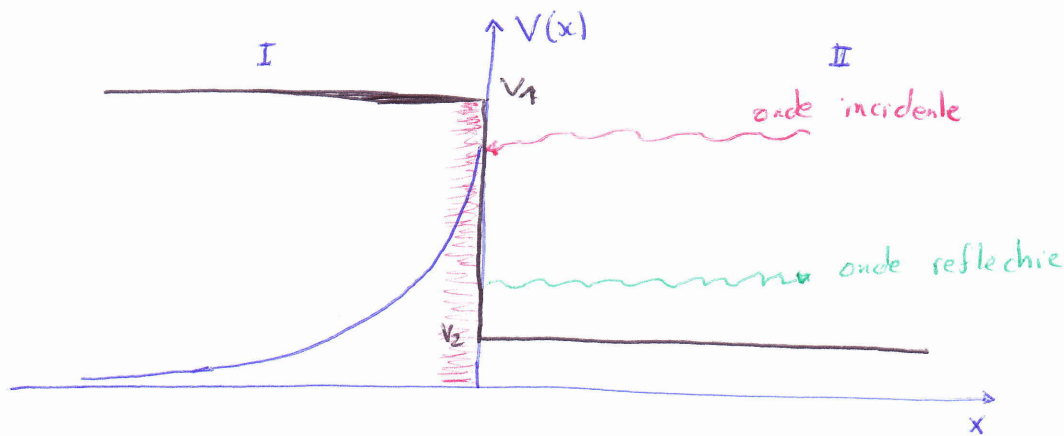
$$p^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_1 - E)$$

$$\varphi_1(x) = C e^{-px} + D e^{px}$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_1(x)$ doit être finie $\Rightarrow C = 0$

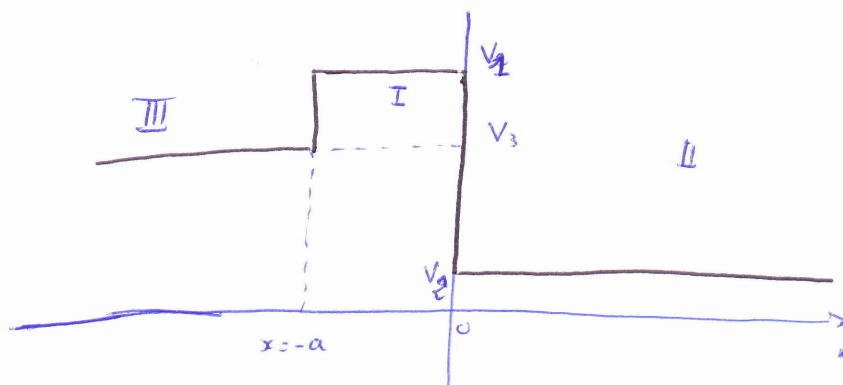
$$\Rightarrow \varphi_1(x) = D e^{px}$$

Donc $\Psi_1(x)$ représente l'onde évanesccente



L'onde évanesccente est présente surtout dans la région hachurée au voisinage de $x=0$

b)



Dans II, Le potentiel de la barrière $V_0 < E$ Dès que la particule puisse arriver à l'entrée de la région III, elle pourra continuer son chemin. Donc ceci n'est possible que si a est très faible $a \rightarrow 0$ (Largeur de la région I est réduite)

Si a est très grande, l'onde évanesccente n'arrive à l'entrée de la région 3 car sa ~~prob~~ probabilité de présence en $x = -a$ est quasi-nulle

C'est l'effet Tunnel